(Mengentheoretische) Topologie Zusammenfassung

Gehalten von *Dr. Kang Li*

Leon Vatthauer

25. Dezember 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

1.1 Topologien

Definition 1.1.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Axiomen:
1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
2. Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{O}$ sind in $\mathcal{O}$ enthalten.
3. Endliche Schnitte von Mengen in $\mathcal{O}$ sind in $\mathcal{O}$ enthalten.
Die Mengen $O \in \mathcal{O}$ heißen *offen* und die Mengen $A \in X \setminus \mathcal{O}$ heißen *abgeschlossen*.

Lemma 1.1.2. *Topologien lassen sich auch durch abgeschlossene Mengen charakterisieren, wir erhalten folgenden Definition: Eine Topologie auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, sodass folgende Axiome gelten:*
1. $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.
2. Schnitte von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.
3. Endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.

1.1.1 Die Diskrete und die Indiskrete Topologie

Beispiel 1.1.3. Für jede Menge X nennen wir $\mathcal{O}_{dsk} := \mathcal{P}(X)$ die *diskrete Topologie* auf X. Jede Teilmenge von X ist offen und abgeschlossen bzgl. dieser Topologie.

Beispiel 1.1.4. Für jede Menge X nennen wir $\mathcal{O}_{in} := \{\emptyset, X\}$ die *indiskrete Topologie* auf X.

1.1.2 Die Kofinite und die Koabzählbare Topologie

Beispiel 1.1.5. Für jede Menge X ist $\mathcal{O}_{kof} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich, oder } O = \emptyset\}$ die *kofinite Topologie* auf X.

Beispiel 1.1.6. Für jede Menge X ist $\mathcal{O}_{koab} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar, oder } O = \emptyset\}$ die *Koabzählbare Topologie* auf X.

1.1.3 Die Leere und die Einpunkttopologie

Beispiel 1.1.7. Auf der leeren Menge $\emptyset$ gibt es genau eine Topologie, nämlich $\mathcal{O}_\emptyset := \{\emptyset\}$, die *leere Topologie*.

Beispiel 1.1.8. Auf einer einelementigen Menge $\{x\}$ gibt es ebenfalls genau eine Topologie, nämlich $\mathcal{O}_{\{x\}} := \{\emptyset, \{x\}\} = \mathcal{O}_{dsk} = \mathcal{O}_{in}$, der *Einpunktraum*.

1.1.4 Die Teilraumtopologie

Beispiel 1.1.9. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann erhalten wir eine Topologie auf M:

$$\mathcal{O}_{M \subseteq X} := \mathcal{O}_X \cap M = \{O \cap M \mid O \in \mathcal{O}_X\}$$

die *Teilraumtopologie*. Offene (abgeschlossene) Mengen in $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ sind Schnitte offener (abgeschlossener) Mengen in X mit M.

Lemma 1.1.10. *1. Ist $M \subseteq X$ offen, so sind alle Teilmengen $A \subseteq M$ die offen bezüglich $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ sind, auch offen bezüglich $\mathcal{O}_X$.*
2. Ist $M \subseteq X$ abgeschlossen, so sind alle Teilmengen $A \subseteq M$ die abgeschlossen bezüglich $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ sind, auch abgeschlossen bezüglich $\mathcal{O}_X$.

1.1.5 Die Metrische Topologie

Definition 1.1.11 (Metrischer Raum)**.** Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X,d) aus einer Menge X und einer *Metrik* $d: X \times X \to \mathbb{R}$, sodass:

1. *Positivität*: $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
2. *Symmetrie*: $d(x,y) = d(y,x)$.
3. *Dreiecksungleichung*: $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Definition 1.1.12 (Metrische Topologie)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum.

1. Für $x \in X$ und $r > 0$ definieren wir die *offene* und die *abgeschlossene* Kugel um x:
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \qquad B_{\leq r}(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}.$$
2. Die *metrische Topologie* auf X ist definiert durch:
$$\mathcal{O}_d := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O. \exists \varepsilon > 0. B_\varepsilon(x) \subseteq O\}.$$

Satz 1.1.13. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, dann gilt:*

1. *Die metrische Topologie ist eine Topologie auf X.*
2. *Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist offen.*
3. *Jedes $B_{\leq\varepsilon}(x)$ ist abgeschlossen.*

Beispiel 1.1.14 (Diskrete Metrik)**.** Die *diskrete Metrik* auf X ist definiert durch
$$d: X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$
Die davon induzierte Topologie ist die diskrete Topologie (Beispiel 1.1.3).

Beispiel 1.1.15 (Standardtopologie)**.** Jeder normierte Vektorraum $(V, \|-\|)$ über $\mathbb{R}$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik
$$d: V \times V \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \|x - y\|.$$
Insbesondere ist der $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum mit der durch die *p-Norm*
$$\|x\|_p = (\Sigma_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$
induzierten Metrik. Für $p = 2$ erhält man so die *euklidische Metrik* auf dem $\mathbb{R}^n$, die zugehörige Topologie nennt man die *Standardtopologie* $\mathcal{O}_{std}$ auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.1.16. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $M \subseteq X$ mit der Metrik $d|_{M \times M}$ stimmt die metrische Topologie mit der Teilraumtopologie überein. Insbesondere erhält man so die* Standardtopologie *auf Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Satz 1.1.17. *Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X induzieren genau dann die gleiche Topologie auf X, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*
$$d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(x,y) < \varepsilon \qquad \wedge \qquad d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d_1(x,y) < \varepsilon.$$
In diesem Fall nennen wir die Metriken äquivalent*.*

1.1.6 Umgebungen

Definition 1.1.18 (Umgebung)**.** Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in X$, wenn eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ existiert mit $x \in O \subseteq U$. Die Menge der Umgebungen von $x \in X$ nennen wir $\mathcal{U}(x)$.

Bemerkung 1.1.19. Für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{O})$ und $x \in X$ gilt:

1. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ so ist auch jedes $V \subseteq U$ eine Umgebung von x.
2. Für jede offene Menge $O \in \mathcal{O}$ gilt $x \in O \Rightarrow O \in \mathcal{U}(x)$.
3. Jede Umgebung von x enthält eine offene Umgebung von x.
4. Vereinigungen von Umgebungen von x sind Umgebungen von x.
5. Endliche Schnitte von Umgebungen von x sind Umgebungen von x.
6. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

1.1.7 Inneres, Abschluss und Rand

Definition 1.1.20 (Inneres, Abschluss, Rand)**.** Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- Das *Innere* $\mathring{M}$ einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist:
$$\mathring{M} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}, O \subseteq M} O.$$
- Der *Abschluss* $\overline{M}$ einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist:
$$\overline{M} = \bigcap_{A \subseteq X \text{ abg. }, M \subseteq A} A.$$
- Der *Rand* ∂M einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist:
$$\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}.$$

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *dicht* in X, wenn $\overline{M} = X$ und *nirgend dicht* in X, wenn $\mathring{\overline{M}} = \emptyset$.

Lemma 1.1.21. *Es gelten folgende Rechenregeln:*
$$\mathring{M} = X \setminus \overline{X \setminus M}$$
und
$$\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M} = \partial X \setminus M.$$

Satz 1.1.22. *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

1. *$\mathring{M}$ ist offen, $\mathring{M} \subseteq M$ und $\mathring{M} = M$ genau dann, wenn M offen ist.*
2. *$\overline{M}$ ist abgeschlossen, $M \subseteq \overline{M}$ und $\overline{M} = M$ genau dann, wenn M abgeschlossen ist.*
3. *∂M ist abgeschlossen, $\partial\partial M \subseteq \partial M$ und $\partial\partial\partial M = \partial\partial M$*

Satz 1.1.23. *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Es gilt:*

1. *$x \in \mathring{M} \iff$ es gibt eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subseteq M$. $\iff M$ ist eine Umgebung von x.*
2. *$x \in \overline{M} \iff$ für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ist $U \cap M \neq \emptyset$. $\iff X \setminus M$ ist keine Umgebung von x.*
3. *$x \in \partial M \iff$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $U \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.*

1.2 Vergleich und Erzeugung von Topologien

1.2.1 Vergleich von Topologien

Definition 1.2.1 (Fein- und Grobheit)**.** Sei X eine Menge mit Topologien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Wenn $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ gilt nennen wir

- $\mathcal{O}_1$ *feiner* als $\mathcal{O}_2$
- $\mathcal{O}_2$ *gröber* als $\mathcal{O}_1$

Beispiel 1.2.2 (Feinste Topologie)**.** Die diskrete Topologie $\mathcal{O}_{dsk} = \mathcal{P}(X)$ ist die *feinste* Topologie auf X.

Beispiel 1.2.3 (Gröbste Topologie)**.** Die indiskrete Topologie $\mathcal{O}_{ind} = \{\emptyset, X\}$ ist die *gröbste* Topologie auf X.

Beispiel 1.2.4 (Kofinite und Standardtopologie)**.** Die kofinite Topologie $\mathcal{O}_{kof}$ auf einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gröber als die Standardtopologie $\mathcal{O}_{std}$.

Satz 1.2.5. *Schnitte von Topologien sind wieder Topologien. Der Schnitt von Topologien $\mathcal{O}_i$ ist gröber als jedes $\mathcal{O}_i$.*

1.2.2 (Sub-) Basen

Definition 1.2.6 (Erzeugte Topologie)**.** Für jede Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist die von $\mathcal{M}$ *erzeugte Topologie* definiert als

$$\langle \mathcal{M} \rangle = \bigcap_{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X), \mathcal{O} \text{ Topologie}} \mathcal{O}.$$

Satz 1.2.7. *$\langle \mathcal{M} \rangle$ ist eine Topologie auf X, und zwar die gröbste Topologie die CM enthält.*

Lemma 1.2.8. *Für jede Menge X und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ lässt sich $\langle \mathcal{M} \rangle$ auch charakterisieren als*
$$\langle \mathcal{M} \rangle = \{\text{beliebige Vereinigungen von endlichen Schnitten von Mengen in } \mathcal{M}\}.$$

Definition 1.2.9 ((Sub-) Basis)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt
1. *Subbasis* von $\mathcal{O}$, wenn $\mathcal{O} = \langle \mathcal{M} \rangle$ gilt.
2. *Basis* von $\mathcal{O}$, wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$ und jede Menge in $\mathcal{O}$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{M}$ ist.

Besitzt $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis, so sagt man $\mathcal{O}$ erfülle das *2. Abzählbarkeitsaxiom*.

Lemma 1.2.10. *Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist Basis einer Topologie auf X genau dann, wenn*
1. *zu jedem $x \in X$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$,*
2. *für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B_1 \cap B_2$ gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Beispiel 1.2.11 (Basis der (In-) diskreten Topologie)**.** Für jede Menge X ist $\mathcal{M} = \{X\}$ eine Basis der indiskreten Topologie und $\mathcal{M}' = \{\{x\} \mid x \in X\}$ eine Basis der diskreten Topologie.

Beispiel 1.2.12 (Basis der Standardtopologie)**.** Die Menge $\mathcal{M} = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ ist eine Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Außerdem ist die Menge $\mathcal{M} = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Standradtopologie auf $\mathbb{R}$, somit erfüllt die Standardtopologie das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

Lemma 1.2.13 (Einbettungssatz von Urysohn)**.** *Erfüllt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $M \subseteq X$.*

1.3 Stetige Abbildungen

Definition 1.3.1 (Stetige Abbildung)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt *stetig*, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist:
$$O \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(X) \in \mathcal{O}_X.$$

Corollary 1.3.2. *1. Äquivalenter weise ist eine Abbildung $f: X \to Y$ stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist:*
$$A \subseteq X \text{ abgeschlossen} \Rightarrow f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen}.$$
2. Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn für alle Teilmenge $S \subseteq X$ gilt:
$$f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}.$$

Beispiel 1.3.3. Beispiele für stetige Funktionen $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$:
1. Für $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{dsk} = \mathcal{P}(X)$ ist jede Abbildung $f: X \to Y$ stetig.
2. Für $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{ind} = \{\emptyset, X\}$ ist jede Abbildung $f: X \to Y$ stetig.
3. Ist $f: X \to Y$ stetig und $M \subseteq X$, so ist auch die Einschränkung $f|_M : M \to Y$ stetig.
4. Ist $f: X \to Y$ stetig und $f(X) \subseteq N \subseteq Y$, so ist auch die Koeinschränkung $f^{|N}: X \to N$ stetig.
5. Für beliebige $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ sind alle konstanten Abbildungen stetig.
6. $id_X : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ ist stetig genau dann, wenn $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ ist.
7. Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f: \emptyset \to X$ und genau eine stetige Abbildung $f: X \to \{m\}$.
8. Die Komposition zweier stetiger Abbildungen ist stetig.

Lemma 1.3.4. *Ist $\mathcal{M}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}_Y$, so ist $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann stetig, wenn $f^{-1}(O)$ offen ist für alle $O \in \mathcal{M}$.*

1.3.1 Homöomorphismen

Definition 1.3.5 (Homöomorphismus)**.** Eine stetige Abbildung $f:X\to Y$ heißt *Homöomorphismus* oder *Isomorphismus von topologischen Räumen*, wenn sie bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung $f^{-1}:Y\to X$ ebenfalls stetig ist. Dann nennt man die topologischen Räume $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ *homöomorph*.

Definition 1.3.6. Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.
1. Eine Abbildung $f:X\to Y$ heißt *offen*, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist:
$$O\in\mathcal{O}_X\Rightarrow f(O)\in\mathcal{O}_Y.$$
2. Eine Abbildung $f:X\to Y$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist:
$$X\setminus A\in\mathcal{O}_X\Rightarrow Y\setminus f(A)\in\mathcal{O}_Y.$$

Satz 1.3.7. *Für eine stetige Abbildung $f:X\to Y$ sind äquivalent:*
1. *f ist ein Homöomorphismus.*
2. *f ist bijektiv und offen.*
3. *f ist bijektiv und abgeschlossen.*

1.3.2 Folgenstetigkeit

Definition 1.3.8 (Stetig in einem Punkt)**.** Eine Abbildung $f:X\to Y$ heißt *stetig in einem Punkt* $x\in X$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist:
$$U\in\mathcal{U}(f(x))\Rightarrow f^{-1}(U)\in\mathcal{U}(x).$$

Satz 1.3.9. *Eine Abbildung $f:X\to Y$ ist stetig genau dann, wenn sie stetig in allen $x\in X$ ist.*

Satz 1.3.10. *Für zwei metrische Räume (X,d_X) und (Y,d_Y) ist $f:X\to Y$ genau dann stetig in $x\in X$, wenn:*
$$\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

Definition 1.3.11 (Folgenstetigkeit)**.** Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.
1. Ein Punkt $x\in X$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in X, wenn es zu jeder Umgebung $U\in\mathcal{U}(x)$ unendlich viele $n\in\mathbb{N}_0$ gibt mit $x_n\in U$.
2. Ein Punkt $x\in X$ heißt *Grenzwert* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in X, wenn für jede Umgebung $U\in\mathcal{U}(x)$ gilt $x_n\in U$ für fast alle $n\in\mathbb{N}_0$.
3. Eine Abbildung $f:X\to Y$ heißt *folgenstetig in einem Punkt* $x\in X$, wenn für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert $x\in X$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit Grenzwert $f(x)\in Y$ ist.
4. Eine Abbildung $f:X\to Y$ heißt *folgenstetig*, wenn sie folgenstetig in allen Punkten $x\in X$ ist.

Definition 1.3.12 (1. Abzählbarkeitsaxiom)**.** Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ erfüllt das *1. Abzählbarkeitsaxiom*, wenn zu jedem Punkt $x\in X$ eine Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Umgebungen $U_n\in\mathcal{U}(x)$ existiert, sodass jede Umgebung $U\in\mathcal{U}(x)$ eine Umgebung U_n enthält. Eine solche Familie von Umgebungen heißt *Umgebungsbasis* im Punkt x.

Lemma 1.3.13. *1. Jeder topologische Raum der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, erfüllt auch das 1. Abzählbarkeitsaxiom.*
2. Jeder metrische Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Satz 1.3.14. *Für topologische Räum $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ gilt:*
1. *Stetige Abbildungen $f:X\to Y$ sind folgenstetig.*
2. *Erfüllt $(X,\mathcal{O}_X)$ das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so sind folgenstetige $f:X\to Y$ auch stetig.*

2 Zusammenhang und Trennung

2.1 Zusammenhang

Definition 2.1.1 ((Lokal) Zusammenhängende Räume)**.** Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt
1. *zusammenhängend*, wenn er keine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere offene Teilmengen besitzt:
$$X = O_1 \cup O_2 \text{ mit } O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X, O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow O_1 = \emptyset \text{ oder } O_2 = \emptyset$$
2. *lokal zusammenhängend*, wenn jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung von x enthält.

Lemma 2.1.2. *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*
1. *X besitzt keine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen*
2. *X und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von X, die offen und abgeschlossen sind.*

Beispiel 2.1.3. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

Satz 2.1.4. *1. Ist $(X,\mathcal{O}_X)$ zusammenhängend und $f: X \to Y$ stetig, so ist auch das Bild $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend.*
2. Vereinigungen von disjunkten zusammenhängenden Teilmengen sind zusammenhängend.

2.2 Trennung von Punkten

Definition 2.2.1 (Trennungsaxiome)**.** Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt:
1. *T_0-Raum*, wenn zu je zwei verschiedenen $x_1, x_2 \in X$ eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ existiert, die nur eine von beiden Punkten enthält
2. *T_1-Raum*, wenn zu je zwei verschiedenen $x_1, x_2 \in X$ eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ existiert, die x_1 enthält, aber nicht x_2 enthält
3. *T_2-Raum* oder *Hausdorffraum*, wenn zu je zwei verschiedenen $x_1, x_2 \in X$ disjunkte offene Teilmenge $O_1, O_2 \subseteq X$ existieren mit $x_1 \in O_1, x_2 \in O_2$
4. *T_3-Raum*, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ disjunkte offene Teilmengen $O_x, O_A \subseteq X$ existieren mit $x \in O_x, A \subseteq O_A$
5. *T_4-Raum*, wenn zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ disjunkte offene Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq X$ existieren mit $A_1 \subseteq O_1, A_2 \subseteq O_2$
6. *regulärer Raum*, wenn er ein T_1-Raum und ein T_3-Raum ist
7. *normaler Raum*, wenn er ein T_2-Raum und ein T_4-Raum ist.

Bemerkung 2.2.2. Die Bedingung an einen T_1-Raum ist äquivalent zu der Forderung, dass einelementige Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Bemerkung 2.2.3. Es gilt:
$$(X,\mathcal{O}) \text{ normal } \Rightarrow (X,\mathcal{O}) \text{ regulär.}$$

Beispiel 2.2.4. Jeder metrische Raum mit der metrischen Topologie ist normal.

Lemma 2.2.5. *Wenn ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt gilt:*
$$(X,\mathcal{O}) \text{ regulär } \Rightarrow (X,\mathcal{O}) \text{ normal.}$$

Lemma 2.2.6. *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein T_k-Raum mit $k \in \{0,1,2,3\}$. Dann ist auch jede Teilmenge $M \subseteq X$ mit der Teilraumtopologie ein T_k-Raum.*

Satz 2.2.7 (Lemma von Urysohn)**.** *Ein Hausdorffraum* $(X,\mathcal{O})$ *ist genau dann normal, wenn zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen* $A_1, A_2 \subseteq X$ *eine stetige Abbildung* $f : X \to [0,1]$ *mit* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in A_1$ *und* $f(x) = 1$ *für alle* $x \in A_2$ *existiert. Eine solche Abbildung heißt* Urysohn-Funktion*.*

Satz 2.2.8 (Fortsetzungssatz von Tietze)**.** *Sei* $(X,\mathcal{O})$ *ein normaler topologischer Raum,* $A \subseteq X$ *abgeschlossen und* $f : A \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gibt es eine stetige Abbildung* $F : X \to \mathbb{R}$ *mit* $F|_A = f$ *(eine* stetige Fortsetzung*).*

3 Konstruktion von Topologischen Räumen

3.1 Initial und Finaltopologie

Definition 3.1.1 (Initialtopologie)**.** Sei X eine Menge und $(Y_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine durch I indizierte Familie topologischer Räume. Die durch eine Familie $f_i: X\to Y$ induzierte *Initialtopologie* auf X ist die von den Urbildern aller offenen Mengen in Y_i erzeugte Topologie auf X:

$$\mathcal{O}_{ini} = \langle \bigcup_{i\in I} \{f_i^{-1}(O) \mid O\in\mathcal{O}_i\}.$$

Definition 3.1.2 (Finaltopologie)**.** Sei X eine Menge und $(Y_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine durch I indizierte Familie topologischer Räume. Die durch eine Familie $g_i: Y_i \to X$ induzierte *Finaltopologie* auf X besteht aus den Mengen, deren Urbilder offen sind

$$\mathcal{O}_{fin} = \{O\subseteq X \mid g_i^{-1}(O)\in\mathcal{O}_i, \forall i\in I\}.$$

Satz 3.1.3. *Sei X eine Menge, $(Y_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $f_i: X\to Y_i$ und $g_i: Y_i\to X$ Familien von Abbildungen.*

1. *Die durch $(f_i)_{i\in I}$ induzierte Initialtopologie ist die gröbste Topologie auf X, für die alle f_i stetig sind.*
2. *Sie ist die einzige Topologie, welche folgende* universelle Eigenschaft *erfüllt: Eine Abbildung $f:(W,\mathcal{O}_W)\to(X,\mathcal{O}_{ini})$ ist stetig genau dann, wenn die Abbildungen $f_i\circ f:(W,\mathcal{O}_W)\to(Y_i,\mathcal{O}_i)$ stetig sind für alle $i\in I$.*
3. *Die durch $(g_i)_{i\in I}$ induzierte Finaltopologie ist die feinste Topologie auf X, für die alle g_i stetig sind.*
4. *Sie ist die einzige Topologie, welche folgende* universelle Eigenschaft *erfüllt: Eine Abbildung $g:(X,\mathcal{O}_{fin})\to(W,\mathcal{O}_W)$ ist stetig genau dann, wenn die Abbildungen $g_i\circ g:(Y_i,\mathcal{O}_i)\to(W,\mathcal{O}_W)$ stetig sind für alle $i\in I$.*

3.2 Teilräume und Quotienten

3.2.1 Die Teilraumtopologie

Definition 3.2.1 (Teilraumtopologie)**.** Seien $(X,\mathcal{O}_X),(W,\mathcal{O}_W)$ topologische Räume, $M\subseteq X$ eine Teilemenge und $\iota: M\to X$ die Inklusionsabbildung.

1. Die *Teilraumtopologie* $\mathcal{O}_{M\subseteq X}$ (Vgl. Beispiel 1.1.9) ist die von ι induzierte Initialtopologie auf M.
2. Eine Abbildung $f: W\to X$ heißt *Einbettung* von $(W,\mathcal{O}_W)$ in $(X,\mathcal{O}_X)$, wenn sie injektiv ist und $\mathcal{O}_W$ die von f induzierte Initialtopologie auf W.

Bemerkung 3.2.2. 1. Die Teilraumtopologie auf M ist die gröbste Topologie auf M, für die die Inklusionsabbildung stetig ist und es gilt:

$$\mathcal{O}_{M\subseteq X} = \{O\cap M \mid O\in\mathcal{O}_X\}.$$

2. Eine injektive Abbildung $f: W\to X$ ist eine Einbettung genau dann, wenn ihre Koeinschränkung $f^{|f(W)}: W\to f(W)$ ein Homöomorphismus ist.

Satz 3.2.3 (Universelle Eigenschaft des Teilraums)**.** *Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $M\subseteq X$ eine Teilmenge. Die Teilraumtopologie ist die einzige Topologie mit folgender* universellen Eigenschaft*:*

Die Inklusionsabbildung $\iota: M \to X$ ist stetig und zu jeder stetigen Abbildung $f:(W,\mathcal{O}_W) \to (X,\mathcal{O}_X)$ mit $f(W) \subseteq M$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{f}: W \to M$ mit $\iota \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd}
(W,\mathcal{O}_W) \arrow[r, dashed, "\exists!\tilde{f}"] \arrow[dr, "f", "f(W)\subseteq M"'] & (M,\mathcal{O}_{M\subseteq X}) \arrow[d, "\iota"] \\
 & (X,\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

3.2.2 Die Quotiententopologie

Definition 3.2.4 (Quotiententopoloogie)**.** Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi: X \to X/\sim, x \mapsto [x]$ die *kanonische Surjektion.*
1. Die *Quotiententopologie* $\mathcal{O}_\sim$ auf $X/\sim$ ist die von π induzierte Finaltopologie auf $X/\sim$.
2. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt *Identifizierung*, wenn sie surjektiv ist und $\mathcal{O}_Y$ die von f induzierte Finaltopologie auf Y ist.

Bemerkung 3.2.5. 1. Die Quotiententopologie auf $X/\sim$ ist die feinste Topologie auf $X/\sim$, für die die kanonische Surjektion $\pi: X \to X/\sim$ stetig ist. Es gilt:
$$\mathcal{O}_\sim = \{O \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(X) \in \mathcal{O}_X\}.$$
2. Eine surjektive Abbildung $f: X \to Y$ ist eine Identifizierung genau dann, wenn die Abbildung $f': X/\sim \to Y, [x] \mapsto f(x)$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ ein Homöomorphismus ist.

Satz 3.2.6 (Universelle Eigenschaft des Quotientenraums)**.** *Sei (X, CO_X) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist der Quotientenraum die einzige Topologie mit der folgenden* universellen Eigenschaft*:*

Die kanonische Surjektion $\pi: X \to X/\sim$ ist stetig und zu jeder stetigen Abbildung $g: X \to Y$ die auf Äquivalenzklassen konstant ist, existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{g}: X/\sim \to Y$ mit $\tilde{g} \circ \pi = g$.

$$\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{O}_Y) & (X/\sim,\mathcal{O}_\sim) \arrow[l, dashed, "\exists!\tilde{g}"'] \\
 & (X,\mathcal{O}_X) \arrow[ul, "g"', "g_{|[x]}konstant"] \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 3.2.7. 1. Ist $(X,\mathcal{O})$ (weg) zusammenhängend so ist auch $(X/\sim,\mathcal{O}_\sim)$ (weg) zusammenhängend.
2. Quotientenräume erhalten im Allgemeinen nicht die Hausdorffeigenschaft.

3.3 Produkte und Summen

3.3.1 Die Produkttopologie

Definition 3.3.1 (Produkttopologie)**.** Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *Produkttopologie* auf der Menge $\bigtimes_{i\in I} X_i$ ist die von den Projektionsabbildungen $\pi_j: \bigtimes_{i\in I} X_i \to X_j$ induzierte Initialtopologie auf $\bigtimes_{i\in I} X_i$. Man bezeichnet diesen Raum als das Produkt der Räume $(X_i,\mathcal{O}_i)$ und mit $\prod_{i\in I} X_i$.

Bemerkung 3.3.2. 1. Die Menge $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I}\{\pi_i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_i\}$ ist eine Subbasis von $\prod_{i\in I} X_i$.
2. Die Menge $\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{O}_i, O_i = X_i$ für fast alle $i \in I\}$ ist eine Basis von $\prod_{i\in I} X_i$.
3. Also sind offene Mengen in $\prod_{i\in I} X_i$ Vereinigungen von Mengen der Form $O = \prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i \subseteq X_i$ offen und $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$.

Beispiel 3.3.3. 1. Für $I = \emptyset$ ist $\prod_{i\in I} X_i$ der Einpunktraum (Vgl. Beispiel 1.1.8).

2. Seien (X_1,d_1) und (X_2,d_2) metrische Räume, dann ist $d:(X_1\times X_2)\times(X_1\times X_2)\to\mathbb{R}$ mit
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\}$$
eine Metrik auf $X_1\times X_2$, die *Produktmetrik*. Die von der Produktmetrik induzierte metrische Topologie entspricht der Produkttopologie. Dies gilt auch für abzählbare Produkte, nicht jedoch für überabzählbare Produkte.

Satz 3.3.4. *Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann ist $\prod_{i\in I}X_i$ die einzige Topologie mit folgender* universellen Eigenschaft. *Die Projektionsabbildungen $\pi_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$ sind stetig und zu jeder Familie stetige Abbildungen $(f_i)_{i\in I}:W\to X_i$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f:W\to\prod_{i\in I}X_i$ mit $\pi_i\circ f=f_i$ für alle $i\in I$.*

$$\begin{tikzcd}
(W,\mathcal{O}_W) \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{i\in I}X_i \arrow[d, "\pi_i"] \\
& (X_i,\mathcal{O}_i)
\end{tikzcd}$$

Satz 3.3.5. *Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $k\in\{0,1,2,3\}$. Dann gilt:*
1. *Ist $(X_i,\mathcal{O}_i)$ ein T_k-Raum für alle $i\in I$, so ist auch $\prod_{i\in I}X_i$ ein T_k-Raum.*
2. *Ist $(X_i,\mathcal{O}_i)$ (weg) zusammenhängend für alle $i\in I$, so ist auch $\prod_{i\in I}X_i$ (weg) zusammenhängend.*

3.3.2 Die Summentopologie

Definition 3.3.6 (Summentopologie)**.** Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *Summentopologie* auf der Menge $\bigsqcup_{i\in I}X_i$ ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_j:X_j\to\bigsqcup_{i\in I}X_i$ induzierte Finaltopologie auf $\bigsqcup_{i\in I}X_i$. Man bezeichnet diesen Raum als die Summe der Räume $(X_i,\mathcal{O}_i)$ und mit $\coprod_{i\in I}X_i$.

Bemerkung 3.3.7. Die Topologie auf $\coprod_{i\in I}X_i$ ist gegeben durch $\mathcal{O}=\{O\in\bigsqcup_{i\in I}X_i\mid\iota_i^{-1}(O)\in\mathcal{O}_I,\forall i\in I\}$. Also sind die offenen Mengen in $\coprod_{i\in I}X_i$ gerade die Vereinigungen von Mengen der Form $O_i\times\{i\}$ für $O_i\in\mathcal{O}_i$.

Beispiel 3.3.8. Für $I=\emptyset$ ist $\coprod_{i\in I}X_i$ der leere Raum (Vgl. Beispiel 1.1.7).

Satz 3.3.9. *Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann ist $\coprod_{i\in I}X_i$ die einzige Topologie mit folgender* universellen Eigenschaft. *Die Inklusionsabbildungen $\iota_j:X_j\to\coprod_{i\in I}X_i$ sind stetig und zu jeder Familie stetige Abbildungen $(g_i)_{i\in I}:X_i\to W$ gibt es genau eine stetige Abbildung $g:\coprod_{i\in I}X_i\to W$ mit $g\circ\iota_i=g_i$ für alle $i\in I$.*

$$\begin{tikzcd}
(W,\mathcal{O}_W) & \coprod_{i\in I}X_i \arrow[l, dashed, "\exists! g"'] \\
& (X_i,\mathcal{O}_i) \arrow[ul, "g_i"] \arrow[u, "\iota_i"']
\end{tikzcd}$$

Satz 3.3.10. *Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $k\in\{0,1,2,3\}$. Dann gilt:*
1. *Ist $(X_i,\mathcal{O}_i)$ ein T_k-Raum für alle $i\in I$, so ist auch $\coprod_{i\in I}X_i$ ein T_k-Raum.*
2. *Gibt es $i\neq j\in I$ mit $X_i,X_j\neq\emptyset$, so ist $\coprod_{i\in I}X_i$ nicht zusammenhängend.*

3.3.3 Topologische Gruppen

Definition 3.3.11 (Topologische Gruppe)**.** Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe $(G,\circ)$, zusammen mit einer Topologie $\mathcal{O}$ auf G, sodass die Gruppenmultiplikation und die Inversion stetig sind.

3.3.4 Topologische Vektorräume

Definition 3.3.12 (Topologischer Vektorraum)**.** Ein *topologischer Vektorraum* ist ein Vektorraum $(V,+,\cdot)$ über $\mathbb{R}$ mit einer Topologie $\mathcal{O}$ auf V, sodass die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation stetig sind bezüglich $\mathcal{O}$, und den Produkttopologien $V \times V$ und $\mathbb{R} \times V$.

4 Kompaktheit

4.1 Kompaktheit

Definition 4.1.1 (Kompakter topologischer Raum)**.** Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

1. Eine *(offene) Überdeckung* von $(X,\mathcal{O})$ ist eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ von (offenen) Teilmengen $O_i \subseteq X$ mit $X \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. Ist $J \subseteq I$ eine Teilmenge, sodass auch $(O_i)_{i\in J}$ eine Überdeckung von X ist, so nennt man $(O_i)_{i\in J}$ eine *Teilüberdeckung* von $(O_i)_{i\in J}$.
2. Der topologische Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X eine *endliche Teilüberdeckung* besitzt.
3. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn sie mit der Teilraumtopologie ein kompakter topologischer Raum ist.

Bemerkung 4.1.2. Alternativ lässt sich das Konzept der Kompaktheit auch mit abgeschlossenen Mengen formulieren:

Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq X$ mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{i\in J} A_i = \emptyset$ gibt.

Beispiel 4.1.3. 1. Jede endliche Topologie ergibt einen kompakten Raum.
2. Die diskrete Topologie auf X ergibt einen kompakten Raum genau dann, wenn X endlich ist.
3. Die kofinite Topologie liefert immer einen kompakten Raum.
4. Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie sind nach dem *Satz von Heine-Borel* kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind.
5. Quotienten kompakter topologischer Räume sind kompakt.
6. Endliche Summen von kompakten topologischen Räumen sind kompakt.

Lemma 4.1.4. *In jedem topologischen Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ gilt:*
1. *Ist $(X,\mathcal{O}_X)$ hausdorffsch, so sind kompakte Teilmengen $K \subseteq X$ abgeschlossen.*
2. *Ist $(X,\mathcal{O}_X)$ kompakt, so sind abgeschlossene Teilmengen $A \subseteq X$ kompakt.*

Satz 4.1.5. *Kompakte Hausdorffräume sind normal.*

Satz 4.1.6. *Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.*
1. *Ist $f: X \to Y$ stetig und X kompakt, so ist auch das Bild $f(X) \subseteq Y$ kompakt.*
2. *Ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist jede stetige Abbildung $f: X \to Y$ abgeschlossen. Insbesondere ist jede stetige Bijektion ein Homöomorphismus.*

4.2 Kompaktheit in metrischen Räumen

4.3 Der Satz von Tychonoff

4.4 Lokale Kompaktheit